

Planche n° 1. Logique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**IT)

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

- 1) (dans cette question, f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
 - a) f est la fonction nulle.
 - b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
 - c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
 - d) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .
 - e) f est l'identité de \mathbb{R} (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
 - f) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
 - g) f est croissante sur \mathbb{R} .
 - h) L'équation $\sin x = x$ a une solution dans \mathbb{R} .
- 2) (dans cette question, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle)
 - a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 - b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- 3) (dans cette question, f est une fonction du plan dans lui-même)
 - a) f est l'identité du plan.
 - b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
- 4) Pour tout point M du plan \mathcal{P} , M est sur le cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R .

Exercice n° 2 (*IT) Donner la négation des phrases suivantes

- 1) $x \geq 3$
- 2) $0 < x \leq 2$.

Exercice n° 3 (**IT)

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

- 1) « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».
- 2) « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Exercice n° 4 (**IT)

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse puis le démontrer.

- 1) $\exists x \in \mathbb{R} / \sin(x) = x$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 \neq 0$.

Exercice n° 5. (**IT)

- 1) Montrer que la fonction \sin n'est pas nulle.
- 2) Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice n° 6. (**IT)

- 1) Montrer que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R} / \sin x = 0)$ » est vraie.
- 2) Montrer que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0)$ » est fausse.

Exercice n° 7. (***)IT)

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice n° 8. (IT)**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que $(\exists k \in \mathbb{N} / b = ka \text{ et } \exists k \in \mathbb{N} / a = kb) \Rightarrow a = b$.

Exercice n° 9. (IT)**

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

- 1) Tout entier naturel est pair ou impair.
- 2) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
- 3) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.
- 4) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice n° 10. (IT)**

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) f est constante sur \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 2) f n'est pas constante sur \mathbb{R} .